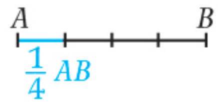
Lattes

Le frazioni

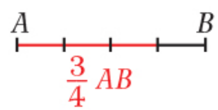
Dall'unità frazionaria alla frazione

Dividiamo il segmento *AB* in quattro parti uguali; se consideriamo solo una parte del segmento, otteniamo **un quarto del segmento *AB***:

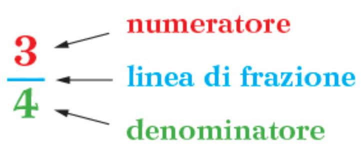


L'**unità frazionaria** $\frac{1}{n}$ (con $n \in \mathbf{N}$ e $n \neq 0$) rappresenta una delle *n* parti uguali in cui è stato diviso l'intero.

Consideriamo il segmento *AB* diviso in 4 parti uguali e consideriamone 3: otteniamo **tre quarti di *AB***:



La scrittura $\frac{3}{4}$ è detta **frazione**.



I termini della frazione sono:

- il **denominatore** che indica in quante parti uguali è stato diviso l'intero;
- il **numeratore** che indica quante parti sono state considerate.

La frazione come operatore

Per individuare la frazione di un intero occorre dividere l'intero per il denominatore e moltiplicare il risultato per il numeratore.

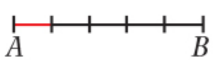
PROBLEMA 1

Marco ha una corda lunga 60 m *e deve tagliarne i* $\frac{3}{5}$*. Quanti metri dovrà tagliarne?*

Rappresentiamo la corda con un segmento *AB*.

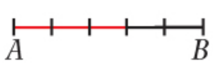
- Dividiamo il segmento in 5 parti uguali e ne consideriamo una, cioè $\frac{1}{5}$ di AB:

  (60 : 5) = 12 m



- Consideriamo 3 di queste parti, cioè $\frac{3}{5}$ di *AB*:

  (12 × 3) = 36 m



La frazione come operatore

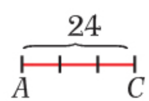
Per ottenere l'intero, conoscendo una parte e la frazione corrispondente, occorre dividere la parte per il numeratore e moltiplicare il risultato per il denominatore.

PROBLEMA 2

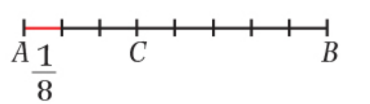
Luca ha perso parte delle sue figurine: ne sono rimaste 24, che corrispondono ai $\frac{3}{8}$ *di tutte quelle che aveva inizialmente. Quante erano le figurine di Luca?*

Rappresentiamo tutte le figurine con il segmento *AB* e indichiamo con il segmento *AC* i $\frac{3}{8}$ di *AB*.

- Dividiamo il segmento *AC* in 3 parti uguali e troviamo l'unità frazionaria, cioè $\frac{1}{8}$ di AB:
  (24 : 3) = 8 figurine



- Moltiplichiamo l'unità frazionaria per 8 e otteniamo *AB*:
  (8 × 8) = 64 figurine



La frazione come quoziente

Ogni frazione può essere considerata come il quoziente della divisione tra il suo numeratore e il suo denominatore:

$$2 : 3 = \frac{2}{3}$$

2 è il **dividendo**, **3** è il **divisore**, $\frac{2}{3}$ è il **quoziente**.

- Se il numeratore è un multiplo del denominatore, il quoziente è un numero naturale:

$$\frac{8}{4} = 8 : 4 = 2$$

- Se il numeratore è uguale al denominatore, il quoziente è 1:

$$\frac{5}{5} = 5 : 5 = 1$$

- Se il denominatore è 1, il quoziente è uguale al numeratore:

$$\frac{3}{1} = 3 : 1 = 3$$

La frazione come quoziente

- Se il numeratore è zero e il denominatore è diverso da zero, il quoziente è zero:

$$\frac{0}{7} = 0 : 7 = 0$$

- Se il denominatore è zero e il numeratore è diverso da zero, la frazione non ha significato:

$$\frac{5}{0} = 5 : 0 = \text{impossibile}$$

- Se il numeratore e il denominatore sono uguali a zero, la frazione è indeterminata:

$$\frac{0}{0} = 0 : 0 = \text{indeterminata}$$

Lattes

Frazioni proprie, improprie, apparenti

- **Una frazione propria ha il numeratore minore del denominatore.**

$$\frac{2}{3} \qquad \frac{7}{8} \qquad \frac{3}{5}$$

- **Una frazione impropria ha il numeratore maggiore del denominatore.**

$$\frac{9}{4} \qquad \frac{8}{3} \qquad \frac{11}{8}$$

- **Una frazione apparente ha il numeratore uguale o multiplo del denominatore.**

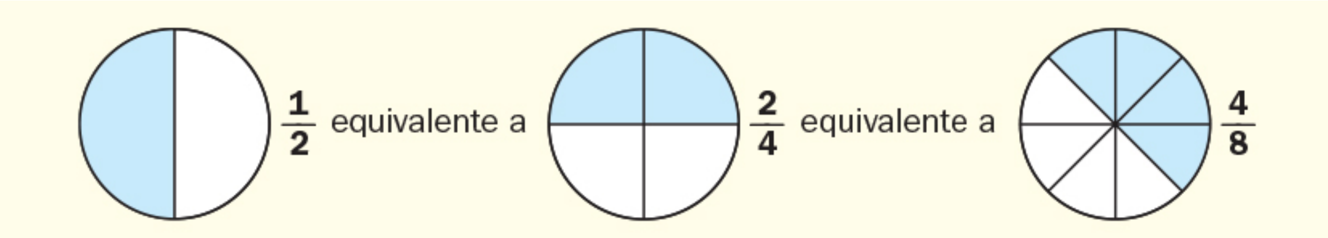
$$\frac{4}{4} \qquad \frac{6}{3} \qquad \frac{15}{5}$$

Lattes

Frazioni equivalenti e proprietà invariantiva

Due o più frazioni sono **equivalenti** se, applicate allo stesso intero, forniscono lo stesso risultato, cioè producono due o più grandezze uguali.

Le frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$, … sono scritte in modo diverso ma corrispondono tutte alla stessa parte dell'intero e perciò sono frazioni equivalenti.



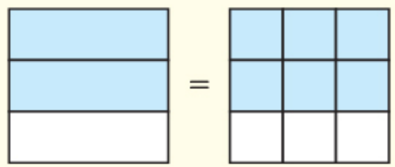
Frazioni equivalenti e proprietà invariantiva

PROPRIETÀ INVARIANTIVA

Moltiplicando o dividendo, se è possibile in modo esatto, entrambi i termini di una frazione per uno stesso numero diverso da zero, si ottiene una frazione equivalente a quella data.

- Il valore di una frazione non cambia moltiplicando sia il numeratore che il denominatore per uno stesso numero:

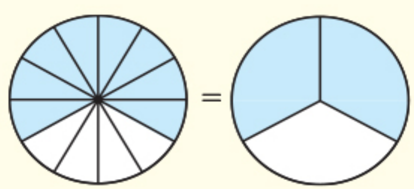
$\frac{2}{3}$ = $\frac{6}{9}$



$$\frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{6}{9}$$

- Il valore di una frazione non cambia dividendo sia il numeratore che il denominatore per uno stesso numero:

$\frac{8}{12}$ = $\frac{2}{3}$



Riduzione di una frazione ai minimi termini

Applicando la proprietà invariantiva si può **semplificare una frazione**.

$$\frac{72}{300} = \frac{72:6}{300:6} = \frac{12:2}{50:2} = \frac{6}{25}$$

La frazione $\frac{6}{25}$ non è più semplificabile perché non esistono divisori comuni a 6 e 25 in quanto i due numeri sono **primi fra loro**.

Una frazione è **ridotta ai minimi termini** quando numeratore e denominatore sono primi fra loro.

Per ridurre una frazione ai minimi termini occorre:

- calcolare il M.C.D. fra numeratore e denominatore;
- dividere numeratore e denominatore per il loro M.C.D.

M.C.D. (72, 300) = 12

$$\frac{72}{300} = \frac{72:12}{300:12} = \frac{6}{25}$$

Lattes

Riduzione di più frazioni al minimo comune denominatore

Per trasformare una frazione (ridotta ai minimi termini) in un'altra equivalente di denominatore assegnato e multiplo di quello della frazione data, occorre moltiplicare i termini della frazione per il quoziente tra il denominatore assegnato e quello della frazione data.

La frazione $\frac{5}{6}$ deve essere trasformata in una frazione equivalente con denominatore 24:

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{20}{24}$$

Riduzione di più frazioni al minimo comune denominatore

A volte può essere utile ridurre più frazioni allo stesso denominatore cioè al **minimo comune denominatore** (**m.c.d.**).

Per trasformare, ad esempio, le frazioni $\frac{3}{5}, \frac{7}{9}, \frac{4}{3}$ al minimo comune denominatore, si procede nel modo seguente:

- si riducono le frazioni ai minimi termini (in questo caso lo sono già);
- si calcola il m.c.m. dei denominatori ottenuti (m.c.d.);
- si trasformano le frazioni date in altre equivalenti aventi per denominatore il m.c.d.

m.c.d. (5, 9, 3) = 45

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 9}{5 \times 9} = \frac{27}{45} \qquad \frac{7}{9} = \frac{7 \times 7}{9 \times 5} = \frac{49}{45} \qquad \frac{4}{3} = \frac{4 \times 15}{3 \times 15} = \frac{60}{45}$$

L’insieme Q dei numeri razionali

Da una frazione qualsiasi si possono ricavare infinite frazioni equivalenti che individuano una **classe di equivalenza**:

$$\left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{6}{15}, \ldots, \frac{44}{110}, \ldots\right\}$$

Ogni classe di equivalenza definisce un **numero razionale** che viene rappresentato con la frazione della classe ridotta ai minimi termini. La classe di equivalenza scritta sopra si rappresenta con la frazione $\frac{2}{5}$.

I numeri razionali positivi formano un insieme numerico che si indica con $\mathbf{Q^+}$.

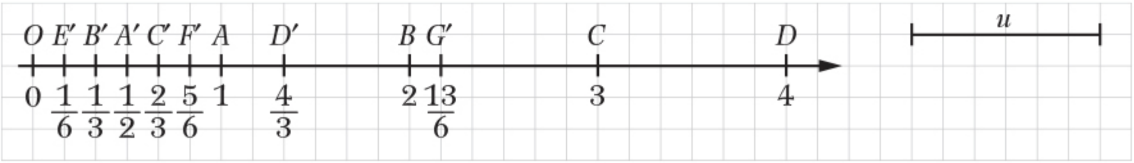
Ogni numero naturale si può rappresentare con una frazione avente il numeratore multiplo del denominatore, quindi $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q^+}$:

$$\frac{10}{5} = 2 \qquad \frac{15}{3} = 3 \qquad \frac{5}{5} = 1$$

Lattes

L’insieme Q dei numeri razionali

I numeri razionali si possono rappresentare su una **retta numerica orientata**.



Esistono anche i numeri razionali negativi **Q^-** che si collocano a sinistra di *O*.

$Q^- \cup Q^+$ formano l’insieme Q dei numeri razionali.

A ogni numero razionale corrisponde un punto sulla retta numerica orientata, ma non è vero il contrario: non a tutti i punti della retta numerica corrisponde un numero razionale.

Confronto di due frazioni

Confrontare due frazioni significa stabilire se la prima ha **valore uguale**, **maggiore** o **minore** della seconda.

FRAZIONI CON UGUALE DENOMINATORE

Date due frazioni con lo stesso denominatore è sempre minore quella con il numeratore minore.

$$\frac{4}{9} < \frac{7}{9}$$

DUE FRAZIONI, UNA PROPRIA E L'ALTRA IMPROPRIA

Ogni frazione propria è sempre minore di una frazione impropria.

$$\frac{3}{7} < \frac{6}{5}$$

Confronto di due frazioni

FRAZIONI CON UGUALE NUMERATORE

Date due frazioni con lo stesso numeratore è sempre minore quella con il denominatore maggiore.

$$\frac{3}{5} < \frac{3}{4}$$

FRAZIONI CON DENOMINATORI DIVERSI

Per confrontare due frazioni aventi numeratori e denominatori diversi:

- si riducono le frazioni allo stesso denominatore;
- si confrontano i numeratori.

$$\frac{3}{7} < \frac{5}{8} \quad \text{perché} \quad \frac{24}{56} < \frac{35}{56}$$

Lattes